数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 1-11



# 類数とイデアル類群 — 古くて新しい問題 —

三宅　克哉（東京都立大学理学研究科）

この報告では，特に「単項化定理」をめぐる話題を扱う．

## 1．前史

フェルマは2元2次形式 $x^2+my^2$ で表される整数の「乗法的構造」に注目し，主として $m=1,\pm 2,3$ の場合を考察した．恐らくはピュタゴラスの三つ組との関連から取り上げたのだろうが，$x^2+y^2$ に関してはほぼ完全な解答を与えた（1640～42年頃）．その内容は，ガウスの数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ における奇素数の分解法則にあたるものを含んでいる．

引き継いでオイラーはより広範な $m$ についての考察を展開した．1741年にゴルトバハに「$a$ と $b$ が互いに素な場合の $a^2\pm mb^2$ の因数について，奇妙な性質を発見しました．ここには何か秘密が隠されているようです．．．」と書き送っている．1749年頃（出版は1849年）の《Tractatus》ではすでに立方および4乗剰余に関連する考察も行っている．そして彼は1772年に到って平方剰余の相互法則を発見する．

ラグランジュは2元2次形式の同値類を考察し，同一の判別式を持つものの類が有限であることを示した（1775年）．「類数」の誕生である．

ルジャンドルは平方剰余に関してルジャンドル記号を導入し，初めて「相互法則」〈Loi de réciprocité〉という呼び名を用い，その一部を証明し，算術数列についての後の「ディリシュレの素数定理」を仮定して考察を展開した．また，彼は「数論 (la théorie des nombres)」という語を初めて導入した（1798年）．（以上については，例えば [Wl-1983] を参照のこと．）

ガウスは1801年に『数論研究 (Disquisitiones Arithmeticae)』を出版し，時代を画した．特に平方剰余の相互法則を完全に証明し，円分論を展開した．また後者を扱った章の前文でレムニスケート関数を示唆し，後進のアーベル，ヤコビ等を大いに刺激した．1828年には，いよいよ4次剰余の相互法則を展開するために，その自然な領域であるガウスの整数環 $\mathbb{Z}(\sqrt{-1})$ を導入し，そこでの数論を展開した．終に2元2次形式代わって代数的数が登場したわけである．しかし，それが主役を演じるのは，クムマーが「理想数」を導入して円分体における因子論を展開する1847年を待たなければならない．

ディリシュレは1837年に $L$ 関数を導入して「ディリシュレの素数定理」を証明し，継いで「（2元2次形式の）類数公式」を与えた（[Di-1837a, -1837b, -1838, -1839, -1842]）．オイラーが芽吹かせた解析的数論を見事に開花させたわけである．

そしてクムマー，クロネッカー，デデキント等によって代数的数論が展開されてゆく．特にデデキントによる「イデアル」が成功をおさめ，代数的数体の「イデアル類群」と「類数」が数学的な実体となった．

## ２．源流クロネッカー

### ２－１．クロネッカーの青春の夢

「単項化定理」，延いては「類体論」の直接の源流はクロネッカーである．彼は特にアーベルとクムマーの影響下で 2 種類の問題を提示した：「アーベル多項式の特徴付け」と，いわゆる「単項化定理」である．

1853 年に 29 歳のクロネッカーは短い論文 [Kr-1853] で次の主張を提示した．

**クロネッカー－ヴェーバーの定理**：有理整数係数のアーベル方程式の根は必ず 1 の冪乗根の有理整数係数の有理関数として表される．

ただし，この時点では，クロネッカーはガロア群が巡回群であるような代数方程式を「アーベル方程式」と呼んでおり，後に [Kr-1877] ではこれを「単純アーベル方程式」，またガロア群が可換群であるものを「アーベル方程式」と呼ぶことにした．この論文でも説明されているように，どちらの定義を取ってもこの定理の含むところは変わらない．彼はこの定理を "Satz" と呼んでいたが，証明は結局はヴェーバーの論文 [Wb-1887] を待つことになる．

また [Kr-1853] では，$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}\,]$ に係数を持つアーベル方程式の根はレムニスケートの等分によって同様に扱うことが出来る，と述べ，さらなる一般化をも示唆している．ただしこの時点で果たしてクロネッカーがどれほど踏み込んだ考察を行っていたかは不明である．引き続いて 1857 年には短い論文『虚数乗法が生じる楕円関数について』（[Kr-1857a]）を著している．これと，この年にディリシュレに宛てた手紙 [Kr-1857b] からみて，いわゆる「クロネッカーの青春の夢」がこの頃に描かれたことは確かであろう．これは，彼がデデキントに宛てた 1880 年の手紙（[Kr-1880]）のなかで「私のいちばんのお気に入りの青春の夢」〈... um meinen liebsten Jugendtraum, ...〉と呼んだ，おおむね次のような数学の問題（予想）を指す：

**クロネッカーの青春の夢**：虚 2 次体上のアーベル多項式の根は，その 2 次体を虚数乗法に持つ楕円関数の特異モデュライと周期の等分値ですべて与えられる．

### ２－２．楕円関数と虚数乗法

ここでアーベルやクロネッカー [Kr-1857a] が扱った楕円関数とその「モデュライ」に触れておく．

アーベルは素直に楕円積分の逆関数に注目し，またコーシーが展開していた複素線積分を取り入れ，たちまち「楕円関数論」を構築してしまう．論文 [Ab-1827] で次のように定義を与えている：

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}, \qquad x = \varphi\alpha = \sin\theta .$$

このとき

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}}$$

であり，$c$がこの楕円関数の「モデュラス（母数）」である．そして彼は特に次を見い出した：$x$ と $y$ が「微分方程式」

$$\frac{dy}{\sqrt{(1\text{-}y^2)(1\text{-}b^2y^2)}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1\text{-}x^2)(1\text{-}c^2x^2)}}$$

の「代数的解」，すなわち，この全微分等式を与えるような代数的な関係式を満たすならば，$a$ は，有理数$\mu$ と $\mu'$，$\mu \geq 0$，によって

$$a = \mu' + \sqrt{-\mu}$$

と表されなければならない；しかも $\mu \neq 0$ ならば$b^2$ も $c^2$ も $a$ とかかわる特殊な数でなければならない．また他のいくつかとともに次の例がアーベルによって与えられている：

$$a = \sqrt{-5}, \qquad b^2 = c^2 = -(2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}}\,)^2.$$

一般に $\mu \neq 0$，$b^2 = c^2$ である場合に，対応する楕円関数は「虚数乗法を持つ」といわれる（後にクロネッカーが命名したものと思われる）．アーベルは，この楕円関数については，円関数（複素指数関数ないしは三角関数）と同様に，周期の「等分方程式」が根号で解けることを示した．また，アーベルも，後にクロネッカーも，この例の場合に$b^2 = c^2$ が「根号で得られる」ことに強く興味をひかれた；ガウスも示唆していない新しいものである！（この$c$がクロネッカーが言うところの$a = \sqrt{-5}$ に対する「特異モデュラス」である．）

一方，クロネッカーはヤコビ[Ja-1827]の記号を利用して，単に関数記号 $\sin am\,(u, \kappa)$ を用いた．そして$n > 0$ に対して $\sin^2 am\,(\sqrt{-n}\cdot u, \kappa)$ が $\sin^2 am\,(u, \kappa)$ の有理関数である場合にそれが $\sqrt{-n}$ による虚数乗法を持つとした．このとき，$\kappa$ がこの楕円関数のクロネッカーの「（特異）モデュラス」である．現在では，楕円関数の「モデュラス」としては，通常$j$不変量をとる．クロネッカーの観察では特に$k = \kappa^2$ が重要であるが，これは体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-n}, j)$ 上６次の代数方程式の根である．上記のアーベルの定義と対比するならば，

$$u = \alpha, \quad \kappa = c, \quad x = \varphi u = \sin am\,(u, \kappa)$$

である．

**2－3．単項化定理**

さて，上で触れたように，クムマーは冪剰余の相互法則の自然な場所として円分体をとり，そこに「理想数」を導入して因子論を展開した（[Ku-1845, -1847, -1857, -1856]）．彼はこの理論が数学的に整合的に展開されることに全く疑いを持っていなかった．たとえば [Ku-1845] では，「このような理想複素数の導入は．．．ガウスが4次剰余を研究するに際し，$a+b\sqrt{-1}$ という形式の複素数を最初に導入したのと同じ，必然的な必要性でもある」と述べ，さらに [Ku-1847] では，当時周期律によって存在が予定されていたがまだ析出されていなかった元素の弗素を引き合いに出し，「いまだ析出されてはいないが，にもかかわらず元素に算入されている弗素は理想因数の類似となりえよう」と述べている（[足立 - 1984] を参照）．

一方，クロネッカーは師でもあったクムマーとは異なった強固な数学観を持っていた．彼は理想数のような重要な概念に対しては「明確な数学的表現」を与えるべきであると考えた．そして1857年には，一般の有限次代数的数体における明快な因子論を多元斉次多項式を用いて展開していたようである（[Kr-1857b]；クムマーの証言が [Ku-1859, p.57] にある）．ただし，クロネッカーは，遅れて1882年になってようやくこれを出版した（[Kr-1882]；[高木 - 1948] の附録（三）に解説がある）．遅れた理由の1つには「単項化定理」〈die Frage der *zu associirenden Gattungen*〉を一般的に定式化するのに手間取ったとされる．これについては，まず虚2次体に関して著しい現象が観察された．彼は，論文 [Kr-1857a] とディリシュレへの手紙 [Kr-1857b] によって，虚数乗法が生じる楕円関数に基づいた分析結果を報告している．判り易く書かれている手紙 [Kr-1857b] によれば，後の展開から見れば必ずしも数学的に正確であるとはいえないが，彼の発見は次のようである：

虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の整数を虚数乗法に持つ楕円関数の（特異）モヂュラス（の平方）を $k$ とし，判別式が $-D$ である2元2次形式の類数（$\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ のイデアル類数）を $H$ とするとき，

1．$k$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ 上 $H$ 次（[Kr-1857a] では正しく $6H$ 次としている）の，冪根で解ける方程式の根である；

2．この方程式はアーベルが扱った性質を持つ：すなわち，どの根を取っても，他の根はすべてその有理式で表され，ガロア群は可換である；

3．$H$ 個のモヂュライ $k$ は判別式が $-D$ である2次形式の $H$ 個の各類の2次形式と対応する；

4．無理数 $k$ のある有理関数は，対応する2次形式に代わる「理想数」と見なせる；等々．

（これらについては，$k$ の代わりに $j$ 不変量を取るべきである．）

また論文 [Kr-1862] ではこのアーベル方程式の根の差積を検討し，後の不分岐性につながる考察を行っている．

ヒルベルトは彼の報文 [Hi-1897] で定理94を示し，そこで初めて「類体」という言葉を用いたが，このときはこの（4）に見られる「単項化」と不分岐性に注目しており，この点でクロネッカーの影響を顕著に表している．また彼の「類体の構想」（[Hi-1898, -1899a, -1899b]）には単項化定理が含まれている．

**ヒルベルトの定理 94** ：有限次代数体 $k$ に対し，奇素数次数 $\ell$ の不分岐巡回拡大 $K/k$ が存在するとする．このとき，$k$ には単項でないイデアル $\mathfrak{j}$ で，$K$ において単項イデアルになるものが存在する．特にこのとき，$k$ の類数は $\ell$ で割れる．

**単項化定理**：有限次代数的数体のイデアルは，そのヒルベルト類体にまで持ち上げればすべて単項イデアルになり，ヒルベルト類体に含まれる数によって表現される．

ヒルベルト類体の存在はフルトヴェングラー [Fu-1907] によって証明された．また，高木類体論によって，代数的数体のヒルベルト類体がその最大不分岐アーベル拡大と一致することが示された．

「クロネッカーの青春の夢」は最終的には高木 [Tk-1920] によって類体論の応用として証明された．また「単項化定理」はアルティンが彼の「一般相互法則」（[Ar-1927]）を用いて群論化し（[Ar-1930]），それを受けて，フルトヴェングラー [Fu-1930] によって証明された．

特に虚 2 次体に対しては，ヴェーバー [Wb-1908] がデデキントの $\eta$ 関数の特殊値を用いて単項化定理を証明している．しかし，以後の「単項化」をめぐる諸結果は，基本的にはアルティンの群論化によっている．ショルツとタウスキ [ST-1934] は，基礎体のイデアルがヒルベルト類体までの中間体で単項化してゆくプロセスを問題にし，これをカピチュレイション問題 (Capitulation Problem) と名付けた；ヒルベルトの定理 94 と単項化定理を繋ごうとしたわけである．後に淡中は単項化定理を「種の体 (genus field)」における特異類の単項化定理として一般化し，寺田 [Te-1949] が証明を与えた．詳しくは，例えば三宅 [M-1988, -1989] を参照されたい．その後，最近の鈴木浩志の業績が著しい．彼は論文 [Su-1991] でヒルベルトの定理 94 の完全な一般化を証明し，ヒルベルトの定理 94 と単項化定理のギャップを繋いだ．さらにこの研究集会の直前には，「淡中－寺田の単項化定理」の申し分のない一般化を証明した（[Su-1997]）．これは最後の第 5 節で紹介される．

歴史的な考察を終えるにあたって，まだ未解決の問題をひとつ提示しておく．この問題に関する群論的な考察は三宅 [M-1992b] に見られる．

**問題**：虚 2 次体 $K$ に対し，そのヒルベルト類体の部分体で，$K$ のすべてのイデアルが単項化するものをクロネッカー類体と呼ぼう．このとき，虚 2 次体であって，そのヒルベルト類体よりも真に小さいクロネッカー類体を持つものが，存在するか？

（ヒルベルト類体よりも実際に小さいクロネッカー類体が存在したとしても，それは必ずしも唯一つであるとは限らないだろう．）

### 3．単項化定理の群論化

アルティンによる単項化定理の群論化（[Ar-1930]）は次のようになっている：$K/k$を有限次代数体のアーベル拡大とし，$\overline{K}$と$\overline{k}$をそれぞれのヒルベルト類体とする；また$C_K$と$C_k$をそれぞれの（絶対）イデアル類群とし，$j_{K/k}: C_k \to C_K$を，$k$から$K$へのイデアルの持ち上げから得られる準同型写像とする．さらに，関連するガロア群を$H = \mathrm{Gal}(\overline{K}/k)$および$N = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$と表し，$V_{H\to N}: H^{\mathrm{ab}} \to N$を$H$から部分群$N$への群論的移送 (trasfer, Verlagerung) とする．アルティンの相互法則により，$H^{\mathrm{ab}} = H/[H, H]$は$C_k$と，また$N$は$C_K$と同型である；ただし，$[H, H]$は群$H$の交換子群である．

このとき，次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc} C_k & \xrightarrow{\;j_{K/k}\;} & C_K \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ H^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow[\;V_{H\to N}\;]{} & N = N^{\mathrm{ab}} \end{array}$$

フルトヴェングラー [Fr-1930] は，一般に有限群$G$の自身の交換子群$[G, G]$への移送，$V_{G\to[G,G]}: G^{\mathrm{ab}} \to [G, G]$が自明な準同型写像であることを示して「単項化定理」を証明した．

### 4．虚2次体のヒルベルト$p$-類体の類数について

虚2次体については，単数がないことから，特に不分岐巡回拡大での単項化が少ない．これを利用して逆にヒルベルト類体のイデアル類群についての情報が得られる．

奇素数$p$を定め，$k$を虚2次体，$\tilde{k}$を$k$のヒルベルト$p$-類体，すなわち，$k$の最大不分岐アーベル$p$-拡大とする．ここでは$k$と$\tilde{k}$のイデアル類群の$p$-部分を，それぞれ簡単に，$C$，$\tilde{C}$とする．ガロア群$G = \mathrm{Gal}(\tilde{k}/k)$について，

$$G_1 = G \supset G_2 = [G_1, G] \supset G_3 = [G_2, G]$$

とするとき，アルティンの相互法則により，$G_1/G_2 \simeq C$，$G_2 \simeq \tilde{C}$である．

野村 [No-1991] によって直ちに次の定理が導かれる（[M-1992a]）：

**定理：** $G_2/G_3 \simeq C \wedge C$.

ただし，$C \wedge C$ は $C$ の自分自身との交代積である．（またメタベリアン群 $G_1/G_3$ の構造も決定されている．）さらに $G_3$ について，次の定理が成り立つ：

**定理**：虚２次体 $k$ について，$p$-rank $C = r \geq 2$ であるとする．またアーベル群 $C$ のタイプを $(\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(r))$，$\varepsilon(i) = p^{e_i}$，$1 \leq e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_r$ ，とする．このとき，次の (1) と (2) が成り立つ：

(1) $|\tilde{C}| = |C \wedge C| \cdot |G_3| = \{\prod_{i=1}^{r} \varepsilon(i)^{(r-i)}\} \cdot |G_3|$；

(2) $|G_3| \geq \prod_{i=1}^{r} [C : C^{\varepsilon(i)}] / \varepsilon(i) = |C \wedge C|^2$.

論文 [M-1992a] ではさらに $\tilde{C}$ と $G_3$ の $p$-rank の評価も得られているが，ここでは省略する．

## ５．鈴木のカピチュレイション定理

有限次代数的数体 $k$ に対し，$\bar{k}$ と $\bar{\bar{k}}$ をそれぞれ $k$ の第一および第二ヒルベルト類体とする．したがって，$\bar{\bar{k}}$ は $\bar{k}$ のヒルベルト類体である．ここではまた，$C = C_k$ を $k$ のイデアル類群とし，$H = \mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k)$，$H^{\mathrm{ab}} = H/[H, H] = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ と置く；アルティンの相互法則により，$H^{\mathrm{ab}} \simeq C$ である．

メタベリアン群 $H$ の自己準同型写像 $\alpha$ が一つ与えられたとする．これは自然にアーベル群 $H^{\mathrm{ab}}$ の，したがってアルティンの相互法則により，$C$ の自己準同型写像を定めるが，記号の煩雑さを避けるために，これらをすべて $\alpha$ で表す；ただし，これがメタベリアン群 $H$ の自己準同型写像から定まっていることが本質的である．さらに

$$C^{[\alpha]} = \langle c^{\alpha} \cdot c^{-1} \mid c \in C \rangle$$

$$C^{\langle\alpha\rangle} = \langle c \in C \mid c^{\alpha} = c \rangle$$

と置く．最新の鈴木 [Su-1997] の結果は次のように述べられる：

**カピチュレイション定理（鈴木）**：記号と仮定は上記の通りとする．さらに，不分岐アーベル拡大 $K/k$ に対し，$K$ のイデアル類群 $C_K$ が条件 $\mathrm{N}_{K/k}(C_K) \supset C^{[\alpha]}$ を満たすとする．このとき，位数 $|C^{\langle\alpha\rangle} \cap \mathrm{Ker}(j_{K/k} : C_k \to C_K)|$ は拡大次数 $[K : k]$ の倍数である．

ただし，$\mathrm{N}_{K/k}$ は $K/k$ のノルム写像であり，$j_{K/k}$ はイデアルの持ち上げによる写像である．

この定理において，当初の $\alpha \in \mathrm{End}(\mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k))$ が恒等写像であるとき，$C^{[\alpha]} = \{1\}$, $C^{\langle\alpha\rangle} = C = C_k$ であり，鈴木 [Su-1991] における「ヒルベルトの定理 94 の一般化」が得られる．実際，さらにここで $K/k$ が巡回拡大のときにはヒルベルトの定理 94 を与え，$K = \bar{k}$ のときには単項化定理を与える．

次に淡中－寺田の単項化定理との関係を見よう．巡回拡大 $k/k_0$ が与えられたとする．このとき，$H = \mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k)$ は $\mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k_0)$ の正規部分群である．そこで $a \in \mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k_0)$ を，それが巡回群 $\mathrm{Gal}(k/k_0)$ の生成元を与えるように取るならば，これによる $\mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k_0)$ の内部自己同型写像は $H = \mathrm{Gal}(\bar{\bar{k}}/k)$ の自己同型写像 $\alpha$ を与える．このとき，$C_k$ の部分群 $C^{\langle\alpha\rangle}$ は $k/k_0$ に関する特異類からなっている．また，条件 $\mathrm{N}_{K/k}(C_K) \supset C^{[\alpha]}$ は，不分岐アーベル拡大 $K/k$ について，$K$ が $k_0$ 上のアーベル拡大でもあることと同値である．したがって，特に $\mathrm{N}_{K/k}(C_K) = C^{[\alpha]}$ の場合には $K$ は巡回拡大 $k/k_0$ の「種の体」となっている；さらにこのとき，$C$ の準同型写像 $\alpha - 1$ によって完全列

$$0 \to C^{\langle\alpha\rangle} \to C \to C^{[\alpha]} \to 0$$

が得られ，拡大次数 $[K:k]$ は位数 $|C^{\langle\alpha\rangle}|$ と一致する；よって，定理から包含関係

$$C^{\langle\alpha\rangle} \subset \mathrm{Ker}(j_{K/k} : C_k \to C_K)$$

が得られる．これは $k$ の特異類がすべて $K$ で単項化することを意味する．したがって，このとき，次の定理が得られる：

**淡中－寺田の単項化定理**：巡回拡大 $k/k_0$ に関する $k$ の特異類は $k/k_0$ の種の体ですべて単項化する．

なお，この定理を巡回拡大でない $k/k_0$ に拡張しようとする場合については，群論的には簡単な反例が得られている（[M-1989] 参照）．

## 文 献

[足立 - 1984] 足立恒雄. フェルマーの大定理, 日本評論社, 1984 ; 第 3 版, 1996.

[高木 - 1948] 高木貞治. 代數的整數論, 岩波書店, 1948 ; 第 2 版, 1971.

[Ab-1827] N. H. Abel. Recherches sur les fonctions elliptiques, Jour. reine angew. Math. Bd. 2 (1827), 101-181, Bd.3 (1828), 160-190 ; Œuvres complètes I, 263-388.

[Ar-1924a] E. Artin. Quadratische Körper im Gebiete der höhheren Kongruenzen I, II, Math. Zeitschrift 19 (1924), 153-246 ; Collected Papers, 1-94.

[Ar-1924b] _____. Über eine neue Art von $L$-Reihen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 3 (1924), 89-108 ; Collected Papers, 105-124.

[Ar-1927] _____. Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg 5 (1927), 353-363 ; Collected Papers, 131-141.

[Ar-1930] _____. Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitäsgesetz, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 46-51 ; Collected Papers, 159- 164.

[Di-1837a] P.G. Lejeune Dirichlet. Beweis eines Satzes über die arithmetische Progression, Ber. Verhandl. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Jahrg. 1837, 108-110 ; Werke I, 307-312.

[Di-1837b] _____. Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganz Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abhandl. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Jahrg., 1837, 45-81 ; Werke I, 313-342.

[Di-1838] _____. Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. Bd.18 (1838), 259-274 ; Werke I, 357-374.

[Di-1839] _____. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitéssimale á la théorie des nombres, Jour. reine angew. Math. 19 (1839), 324-369, Bd.21 (1840), 1-12 und 134-155 ; Werke I, 411-196.

[Di-1842] _____. Recherches sur les formes quadratiques á coefficients et á indetérmiées complexes, Jour. reine angew. Math. Bd. 24 (1842), 291-371 ; Werke I, 533 -618.

[Fu-1907] Ph. Furtwängler. Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. 63 (1907), 1-37.

[Fu-1930] _____. Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 7 (1930), 14-36.

[Ga-1801] C.F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae, Leibzig, 1801 ; Werke I, Göttingen, 1870.

[Ga-1828] _____. Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Prima, Comment. soc. reg. sci. Gottingen. 1828 ; Werke II, 65-92.

[Ga-1832] _____. Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio Secunda, Comment. soc. reg. sci. Gottingen. 1832 ; Werke II, 93-148.

[Hi-1897] D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresb. Deutsch. Math.-Verein 4 (1897), 175-546 ; Gesammelte Abhandlungen. Band I : Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1932; 2nd ed., 1970, pp. 63-363.

[Hi-1898] _____. Über die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper, Nachr.Ges.Wiss.Göttingen (1898), 377-399; Acta Math. Stockh. 26 (1902), 99-132; Gesammelte Abhandlungen. Band I : Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1932; 2nd ed., 1970, pp. 483-509.

[Hi-1899a] _____. Über die Theorie der relativquadratschen Zahlkörper, Jahresber.Deutsch.Math.-Verein. 6 (1899), 88-94; Gesammelte Abhandlungen. Band I: Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1932; 2nd ed., 1970, pp. 364-369.

[Hi-1899b] _____. Über die Theorie der relativquadratschen Zahlkörpers, Math. Ann. 51 (1899), 1-127; Gesammelte Abhandlungen. Band I: Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1932; 2nd ed., 1970, pp. 370-482.

[Ja-1827] C. G. J. Jacobi. FUNDAMENTA NOVA THEORIAE FUNCTONUM ELLIPTICARUM, Regiomonti, 1829 ; Math. Werke I, 49-239.

[Kr-1853] L. Kronecker. Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1853), 365-374 ; Werke IV, 1-11.

[Kr-1857a] _____. Über die elliptische Functionen, für welche complex Multiplication stattfindet, Monatsb. König. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1857), 455-460 ; Werke IV, 177-183.

[Kr-1857b] _____. Brief an G. L. Dirichlet vom 17 Mai 1857, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1885), 253-297 ; Werke V, 418-421.

[Kr-1877] _____. Über Abelsche Gleichung (Anzug aus der am 16. April 1877 gelesenen Abhandlung), Monatsb. Königl. Preuss. Acad. Wiss. Berlin (1877), 845-851 ; Werke IV, 63-72.

[Kr-1880] _____. Auszug aus einem Briefe von L. Kronecker an R. Dedekind, Werke V, 455-457.

[Kr-1882] _____. Grundzüge einer arithmetschen Theorie der algebraischen Grössen, Jour. reine angew. Math.92 (1882), 1-122 ; Werke II, 237-388.

[Ku-1845] E. Kummer. Zur Theorie der complexen Zahlen, Monatber. kgl. preuss. Wiss. Berlin (1845), 87-96 ; Jour. reine angew. Math. 35 (1847), 319-326 ; Collected Papers I, 203-210.

[Ku-1847] _____. Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complex Zahlen in ihre Primfactoren, J. reine angew. Math. 35 (1847), 327-367; Collected Papers I, 211- 251.

[Ku-1857] _____. Über die den Gaussischen Perioden der Kreistheilung entsprechenden Congruenzwurzeln, Jour. reine angew. Math. 53 (1857), 142-148 ; Collected Papers I, 573-580.

[Ku-1856] _____. Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn $n$ eine Zusammengesetzte Zahl ist, Math. Abhandl. Königl. Akad. Wiss. Berlin (1856), 1-47 ; Collected Papers I, 583-629.

[Ku-1859] _____. Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist, Math. Abhandl. Königl. Akad. Wiss. Berlin (1859), 19-159 ; Collected Papers I, 699-839.

[M-1988] K.Miyake. The Capitulation Problem, Sugaku Expositions 1 (1988), 175-194.

[M-1989] _____. Algebraic Investigations of Hilbert's Theorem 94, the Principal Ideal Theorem, and the Capitulation Problem, Expo. Math. 7 (1989), 289-346.

[M-1992a] _____. On the ideal class groups of the $p$-class fields of quadratic number fields, Proc. Japan Acad. Ser.A Math. Sci. 68 (1992), 62-67.

[M-1992b] _____. Some p-groups with two generators which satisfy certain conditions arising from arithmetic in imaginary quadratic fields, Tôhoku Mathematical Journal 44, No.3 (1992), 443-469.

[No-1991] A. Nomura. On the Existence of Unramified $p$-Extensions, Osaka J. Math. 28 (1991), 55-62.

[ST-1934] A. Scholz und O. Taussky. Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratscher Körper. Ihre rechnerische Bestimung und ihr Einfluss auf den Klassenkörper-turm, Jour. reine angew. Math. 171 (1934), 19-41.

[Su-1991] H. Suzuki. A Generalization of Hilbert's Theorem 94, Nagoya Math. J. 121 (1991), 161-169.

[Su-1997] _____. On Capitulation Problem, Preprint, 1997.

[Tk-1920] T. Takagi. Ueber eine Theorie des relativ Abel'schen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Tokyo 41 (1920), 1-133 ; Collected Papers, 73-167.

[Te-1949] F. Terada. On a Generalization of the Principal Ideal Theorem, Tôhoku Math. J. 1 (1949), 229-269.

[Wb-1887] H. Weber. Theorie der Abelischen Zahlkörper, I, II, Acta Math. 8 (1886), 193-263; 9 (1887), 105-130.

[Wb-1908] _____. LEHRBUCH DER ALGEBRA III, Druck und Verlag, Braunschweig, 1908.

[Wl-1983] A. Weil. NUMBER THEORY : An Approach through History, Birkhäuser, Boston, 1983 ; 日本語訳：数論 ― 歴史からのアプローチ，足立恒雄・三宅克哉 共役，日本評論社，1987.